

5. PROBLEMA DA FÁBRICA DE PAPEL

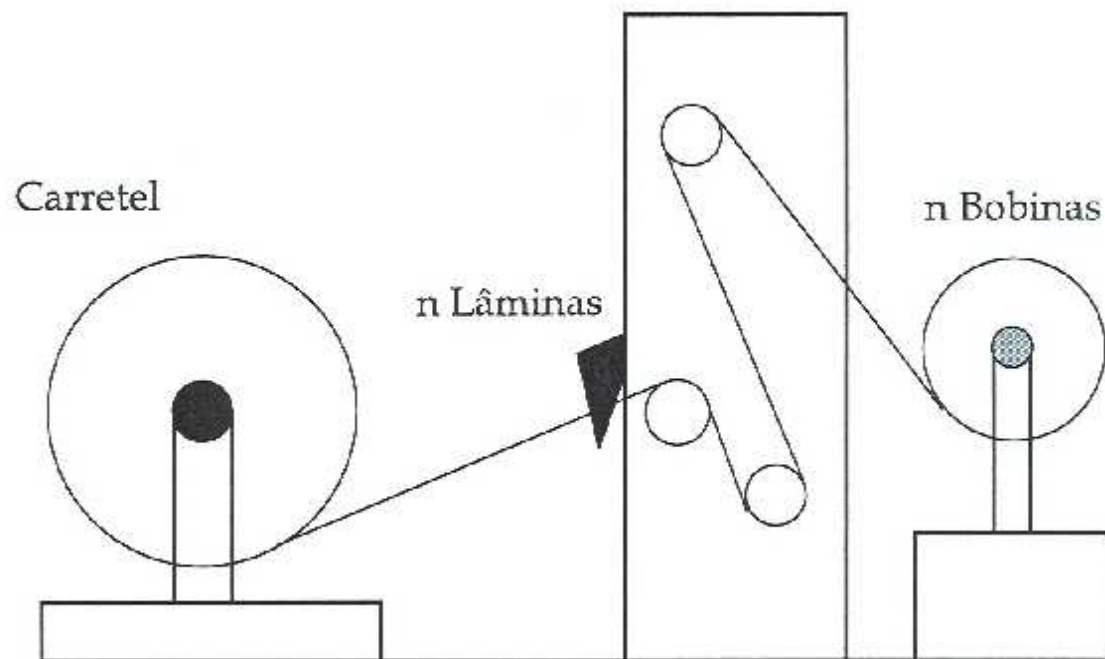
O papel é normalmente fabricado em rolos grandes (em largura e em diâmetro), que depois são divididos em rolos mais pequenos, que por sua vez poderão ser directamente para clientes ou para cortar em formatos.

Vejamos o seguinte exemplo. O papel é produzido em rolos com 6 metros de largura. A partir destes rolos é necessário produzir, pelo menos, 30 rolos mais pequenos com 280 cm de largura, 60 rolos com 200 cm de largura, e 48 rolos com 150 cm de largura.

Assim sendo, um rolo de 6 metros pode ser dividido, por exemplo, em 2 rolos de 280 cm, sobrando um “rolinho” de 40 cm que é considerado desperdício.

Assumindo que existem rolos grandes em quantidade suficiente para satisfazer esta encomenda, o problema consiste em determinar a forma de cortar os rolos grandes, de forma a minimizar o desperdício.

5. PROBLEMA DA FÁBRICA DE PAPEL



5. PROBLEMA DA FÁBRICA DE PAPEL

Para formular este problema é preciso começar por determinar de quantas formas distintas um rolo grande pode ser cortado nos rolos com as larguras pretendidas.

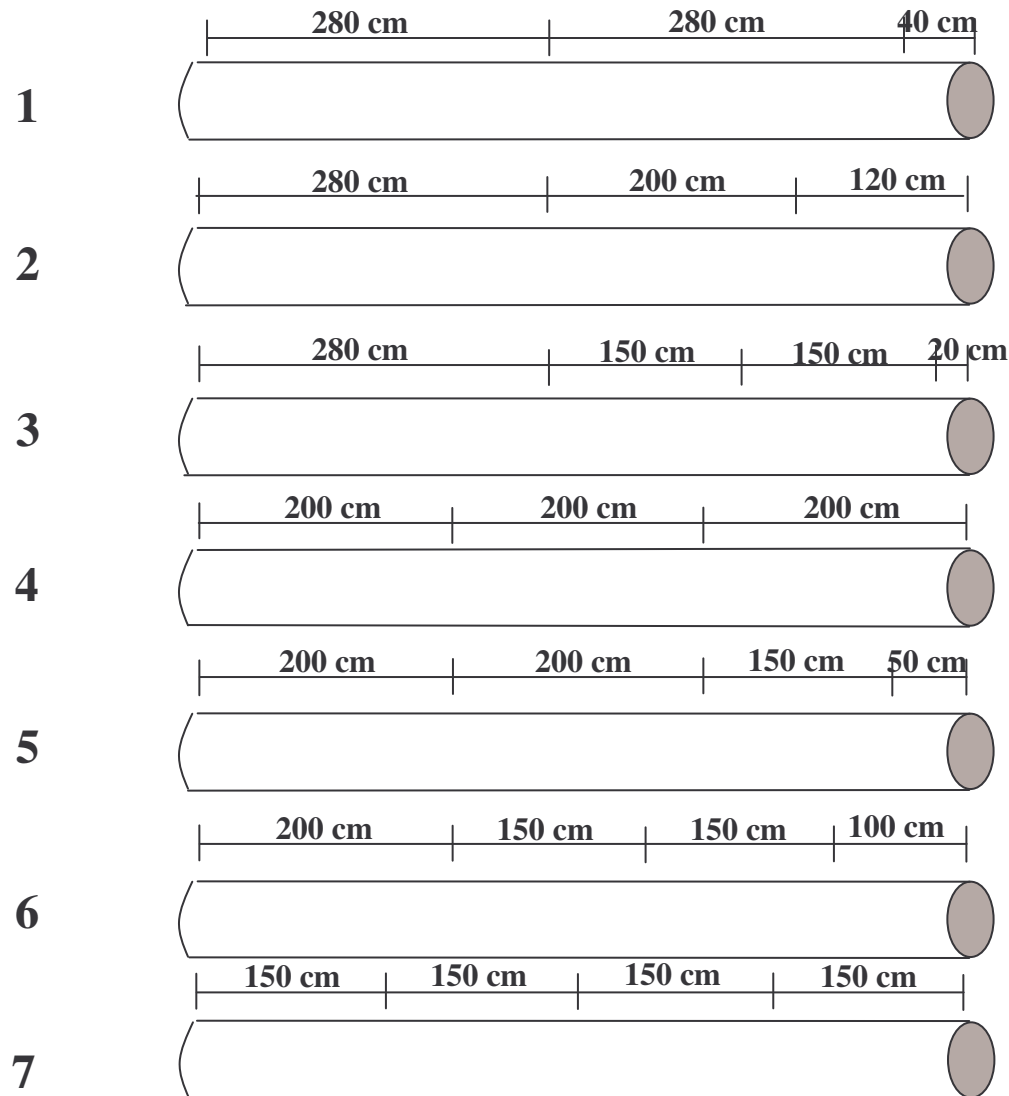
Para além do exemplo dado, (2 rolos de 280 cm, sobrando 40 cm de desperdício) podem ainda ser determinados 6 outros “padrões de corte” (tabela seguinte).

VARIÁVEIS DE DECISÃO

As variáveis de decisão $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ correspondem ao número de vezes que cada padrão de corte é aplicado no corte de um rolo grande.

4. PROBLEMA DA FÁBRICA DE PAPEL

Formas alternativas de corte dos rolos de 6 metros, de acordo com os comprimentos especificados, e respectivas sobras:



5. PROBLEMA DA FÁBRICA DE PAPEL

A tabela seguinte, para além dos diferentes padrões de corte, apresenta ainda o número de rolos pequenos pedidos, bem como o desperdício gerado por cada padrão de corte.

Largura dos rolos (cm)	TIPOS DE CORTE							Nº de rolos pedidos
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
280	2	1	1	0	0	0	0	30
200	0	1	0	3	2	1	0	60
150	0	0	2	0	1	2	4	48
DESPERDÍCIO (cm)	40	120	20	0	50	100	0	

5. PROBLEMA DA FÁBRICA DE PAPEL

FUNÇÃO OBJECTIVO

$$\text{Minimizar } z = 40x_1 + 120x_2 + 20x_3 + 50x_5 + 100x_6$$

RESTRIÇÕES

$$\begin{array}{rcll} 2x_1 + x_2 + x_3 & & \geq & 30 \text{ (Nº de rolos com 280 cm de largura)} \\ x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 & & \geq & 60 \text{ (Nº de rolos com 200 cm de largura)} \\ 2x_3 + x_5 + 2x_6 + 4x_7 & \geq & 48 & \text{ (Nº de rolos com 150 cm de largura)} \end{array}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

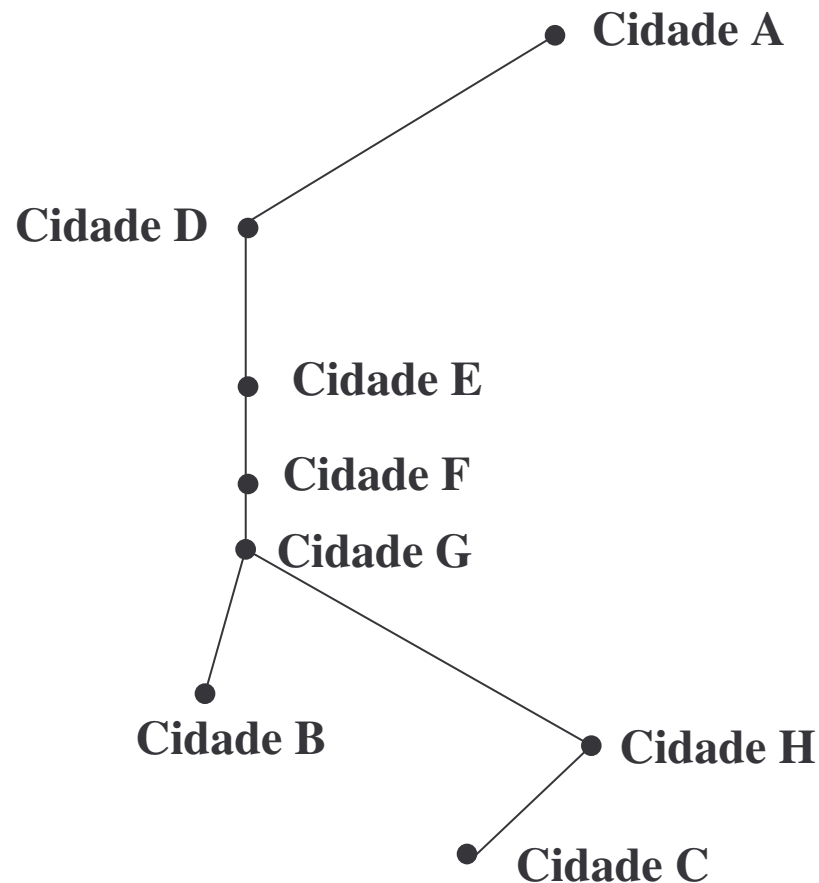
$$x_5 \geq 0$$

$$x_6 \geq 0$$

$$x_7 \geq 0$$

6. PROBLEMA DO TRANSPORTE DE MATERIAIS

Suponhamos a decisão relativa à forma de escoamento do material **ALIMARK** a partir da estação de caminho de ferro da cidade A e com destino às cidades B e C por via ferroviária e/ou por via marítima. O esquema das ligações ferroviárias possíveis é o que se representa na seguinte figura:



6. PROBLEMA DO TRANSPORTE DE MATERIAIS

Pretende-se escolher o percurso/meio de transporte mais económico, tendo em atenção os seguintes dados (fictícios):

- A quantidade anual a movimentar é, no máximo, de 250 000 toneladas.
- O custo/tonelada em cada troço de ligação ferroviária e a respectiva capacidade expressa em toneladas/ano é:

	CUSTOS (unidades monetárias)	CAPACIDADES (toneladas/ano)
Cidade <u>A</u> – Cidade <u>D</u>	80	250 000
Cidade <u>D</u> - Cidade <u>E</u>	40	200 000
Cidade <u>E</u> – Cidade <u>F</u>	30	200 000
Cidade <u>F</u> – Cidade <u>G</u>	5	200 000
Cidade <u>G</u> – Cidade <u>B</u>	30	100 000
Cidade <u>G</u> – Cidade <u>H</u>	30	200 000
Cidade <u>H</u> - Cidade <u>C</u>	40	200 000

6. PROBLEMA DO TRANSPORTE DE MATERIAIS

Os custos por tonelada nas ligações Cidade D – Cidade B e Cidade D – Cidade C por via marítima são, respectivamente, 80 e 85 unidades monetárias e a frota apenas permite que sejam transportadas da Cidade D 100 000 toneladas, qualquer que seja o destino.

O consumo anual é de 90 000 toneladas na Cidade B e 140 000 toneladas na Cidade C.

VARIÁVEIS DE DECISÃO

x_1 – Quantidade a transportar da Cidade A para a Cidade D (ton./ano)

x_2 – Quantidade a transportar da Cidade D para a cidade B, por via férrea (ton./ano)

x_3 – Quantidade a transportar da Cidade D para a cidade C, por via férrea (ton./ano)

x_4 – Quantidade a transportar da Cidade D para a Cidade B, por via marítima (ton./ano)

x_5 – Quantidade a transportar da Cidade D para a Cidade C, por via marítima (ton./ano)

6. PROBLEMA DO TRANSPORTE DE MATERIAIS

FUNÇÃO OBJECTIVO

$$\text{Minimizar } z = 80x_1 + (40 + 30 + 5 + 30)x_2 + (40 + 30 + 5 + 30 + 40)x_3 + 80x_4 + 85x_5 = 80x_1 + 105x_2 + 145x_3 + 80x_4 + 85x_5$$

RESTRIÇÕES

$$x_1 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \text{ (todo o material que chega à Cidade D é escoado)}$$

$$x_1 \leq 100\,000 \text{ (limite de capacidade a partir da Cidade D)}$$

$$x_2 + x_4 = 90\,000 \text{ (quantidade necessária na Cidade B)}$$

$$x_3 + x_5 = 140\,000 \text{ (quantidade necessária na Cidade C)}$$

$$x_4 + x_5 \leq 100\,000 \text{ (restrição de capacidade da frota)}$$

$$x_1 \leq 250\,000 \text{ (quantidade que é possível transportar da Cidade A para a Cidade D, por via férrea)}$$

$$x_2 \leq 100\,000 \text{ (quantidade que é possível transportar da Cidade D para a Cidade B, por via férrea)}$$

$$x_3 \leq 200\,000 \text{ (quantidade que é possível transportar da Cidade D para a Cidade C, por via férrea)}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \text{ (restrições de não-negatividade)}$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES EQUIVALENTES

DOIS SISTEMAS SÃO EQUIVALENTES SE TÊM O MESMO CONJUNTO DE SOLUÇÕES. UMA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA É TAMBÉM SOLUÇÃO DO OUTRO SISTEMA.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

PARA RESOLVER UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES TENTA-SE OBTER UM SISTEMA EQUIVALENTE QUE SEJA MAIS FÁCIL DE RESOLVER.

OBTENÇÃO DE UM SISTEMA EQUIVALENTE – OPERAÇÕES ELEMENTARES

- **MULTIPLICAÇÃO DE QUALQUER EQUAÇÃO DO SISTEMA POR UM NÚMERO POSITIVO OU NEGATIVO.**
- **ADIÇÃO ALGÉBRICA A QUALQUER EQUAÇÃO DE UM MÚLTIPLO DE OUTRA EQUAÇÃO DO SISTEMA.**

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 4$$

SISTEMA EQUIVALENTE

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2$$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2$$

SISTEMA EQUIVALENTE

$$x_1 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 6$$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2$$

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

SISTEMA CANÔNICO

SISTEMA EM QUE EM CADA EQUAÇÃO HÁ UMA VARIÁVEL QUE NESSA EQUAÇÃO TEM COEFICIENTE 1 E NAS OUTRAS EQUAÇÕES COEFICIENTE 0 (NÃO EXISTE)

$$x_1 + 0x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 6$$

$$0x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2$$

PODE-SE OBTER O CONJUNTO DE TODAS AS SOLUÇÕES DO SISTEMA, DANDO VALORES ARBITRÁRIOS ÀS VARIÁVEIS x_3 , x_4 E x_5 E CALCULANDO OS VALORES CORRESPONDENTES DE x_1 E DE x_2 .

Variáveis básicas: x_1 e x_2

Variáveis não básicas: x_3 , x_4 e x_5

Solução básica: todas as variáveis não básicas iguais a zero.

$$x_1 = 6, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$$

Solução básica admissível: solução básica em que os valores de todas as variáveis básicas são não negativos

RESOLUÇÃO GRÁFICA, ALGÉBRICA E MATRICIAL DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Maximizar $z = 4x_1 + 2x_2$

Sujeito a:

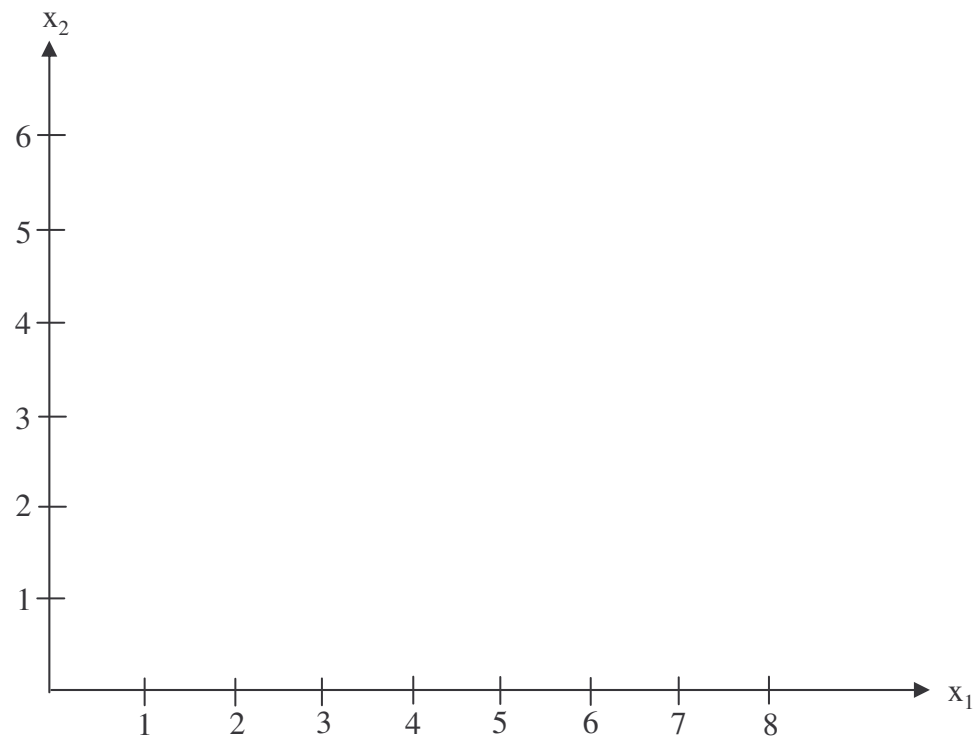
$$x_1 - x_2 \leq 2 \quad \textcircled{1}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad \textcircled{2}$$

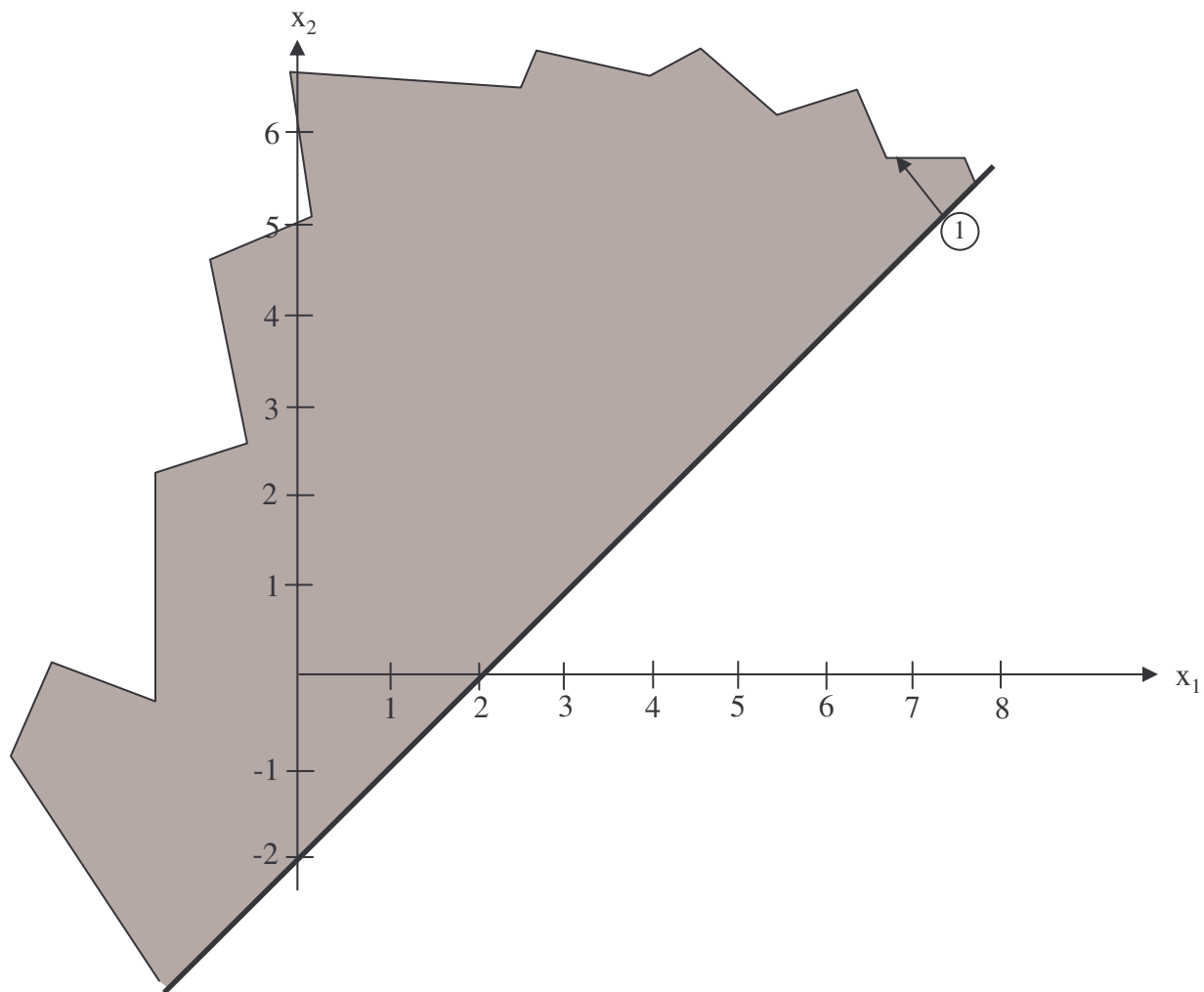
$$x_1 \geq 0 \quad \textcircled{3}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \textcircled{4}$$

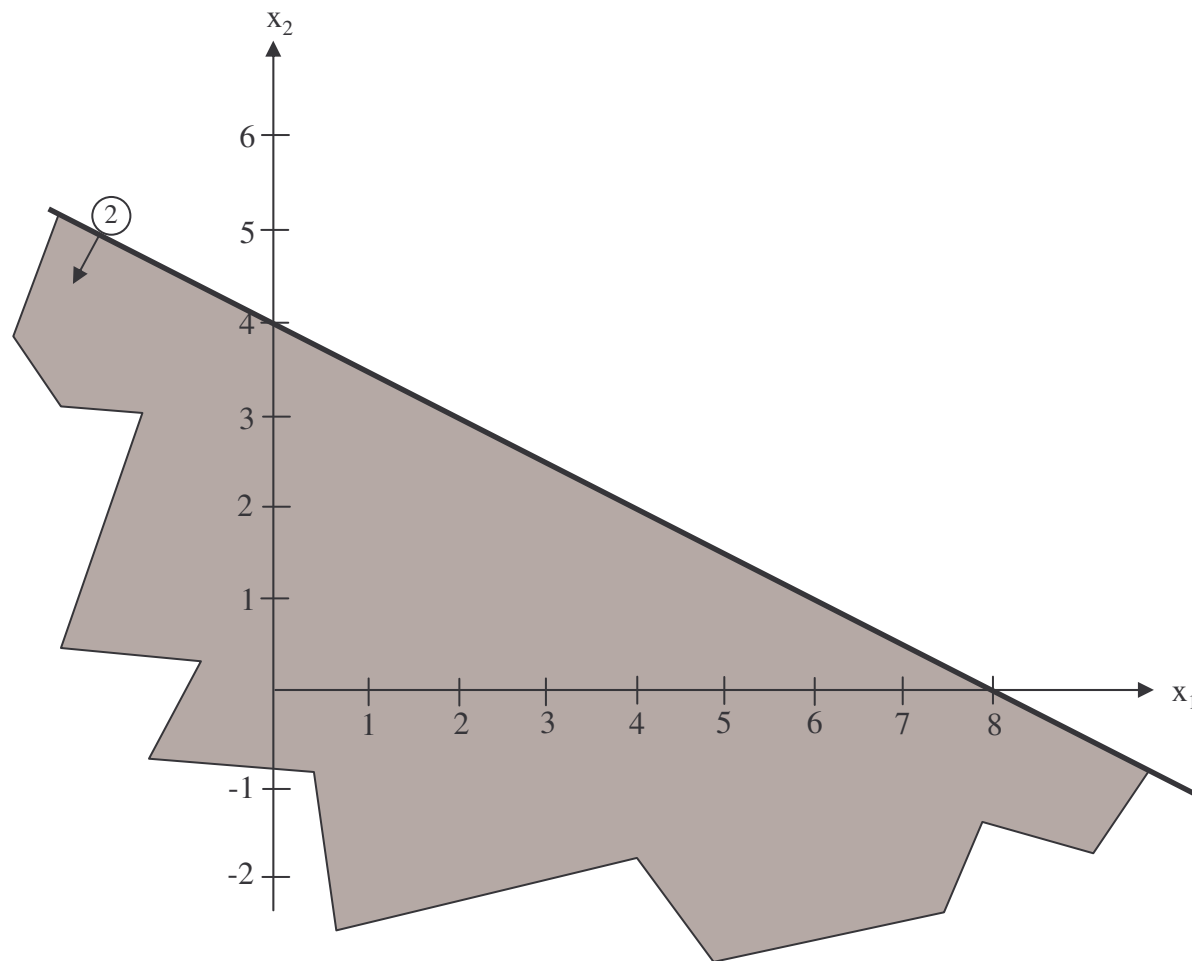
RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR



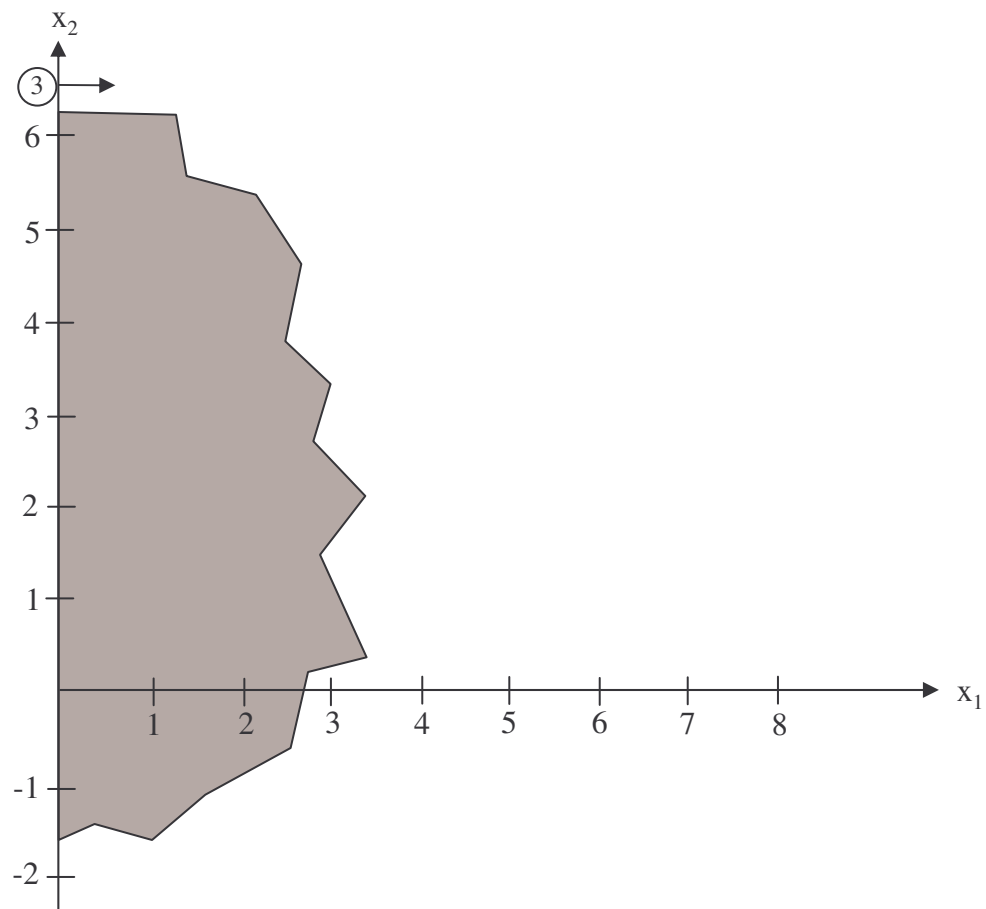
RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR



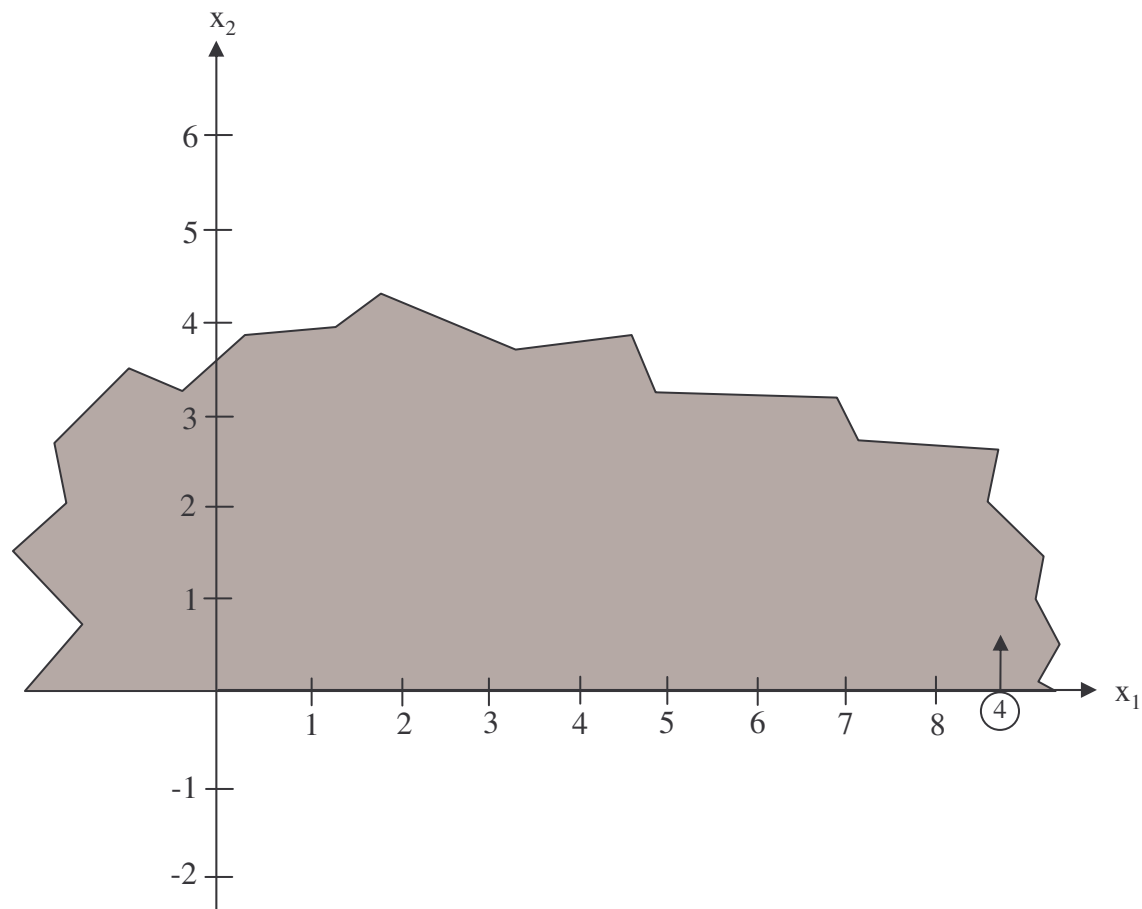
RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR



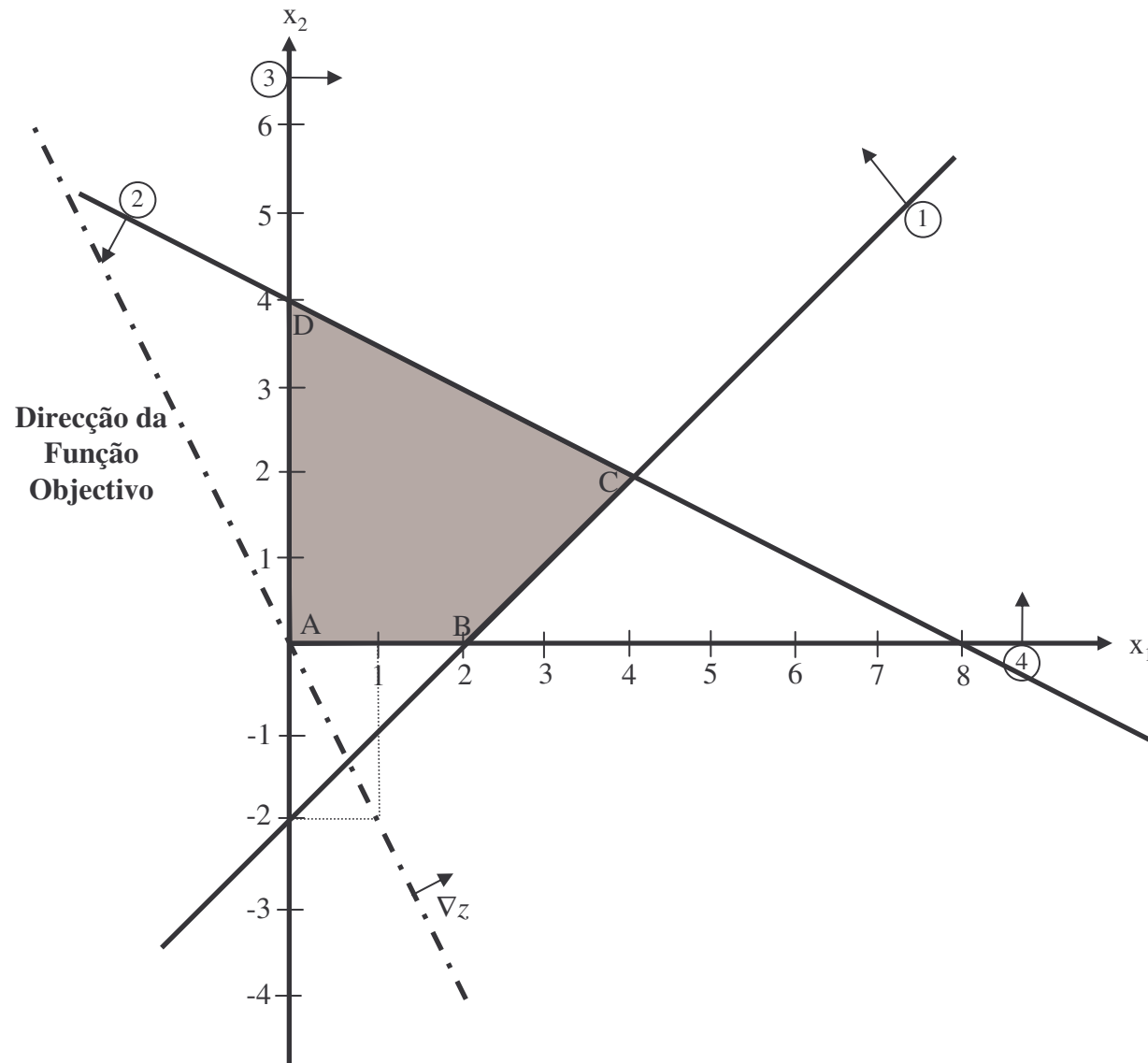
RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR



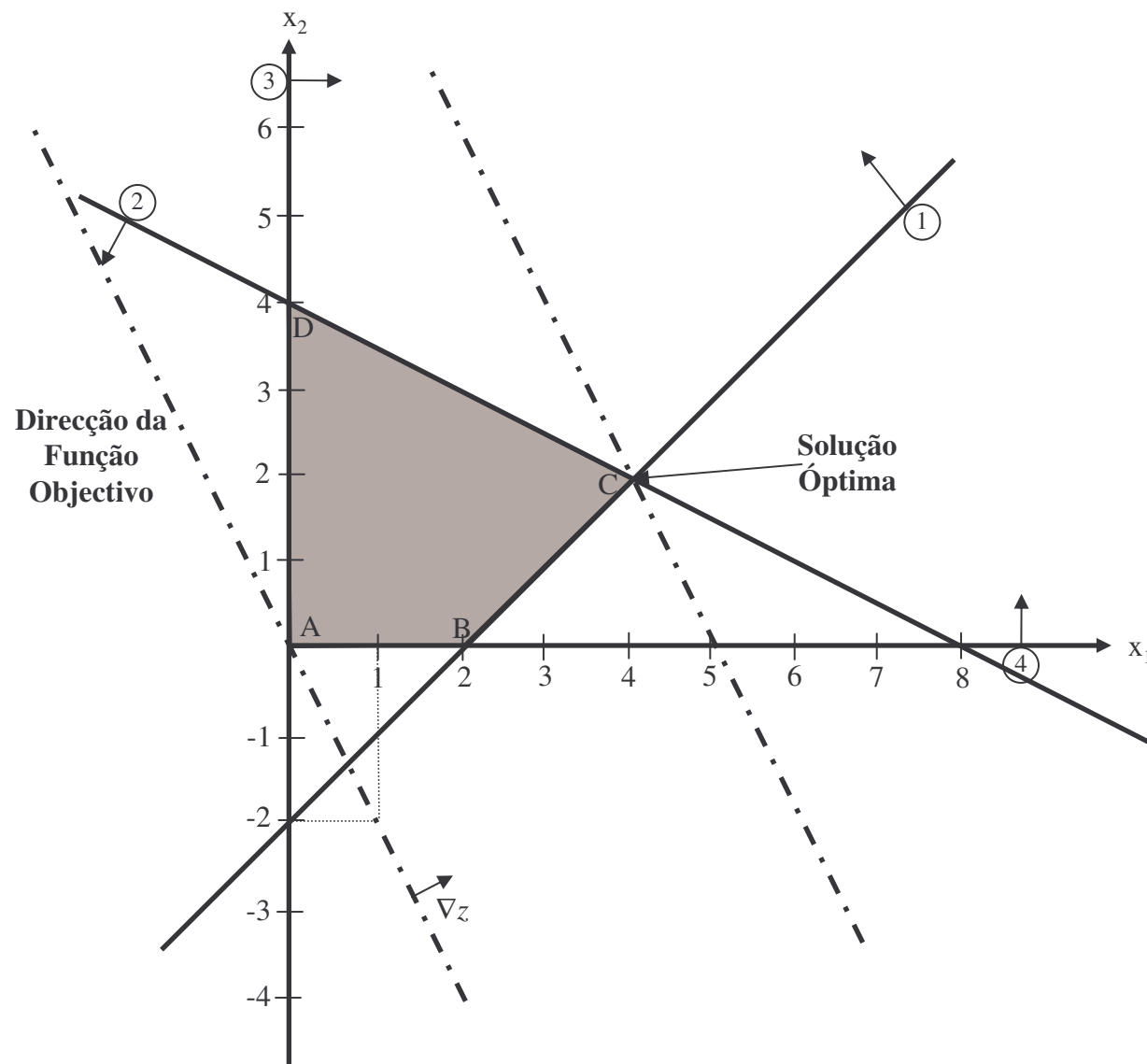
RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR



RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR



RESOLUÇÃO GRÁFICA E ALGÉBRICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR



SOLUÇÕES BÁSICAS E ADMISSIBILIDADE

Soluções básicas:

A(0, 0, 2, 8) admissível, $z = 0$

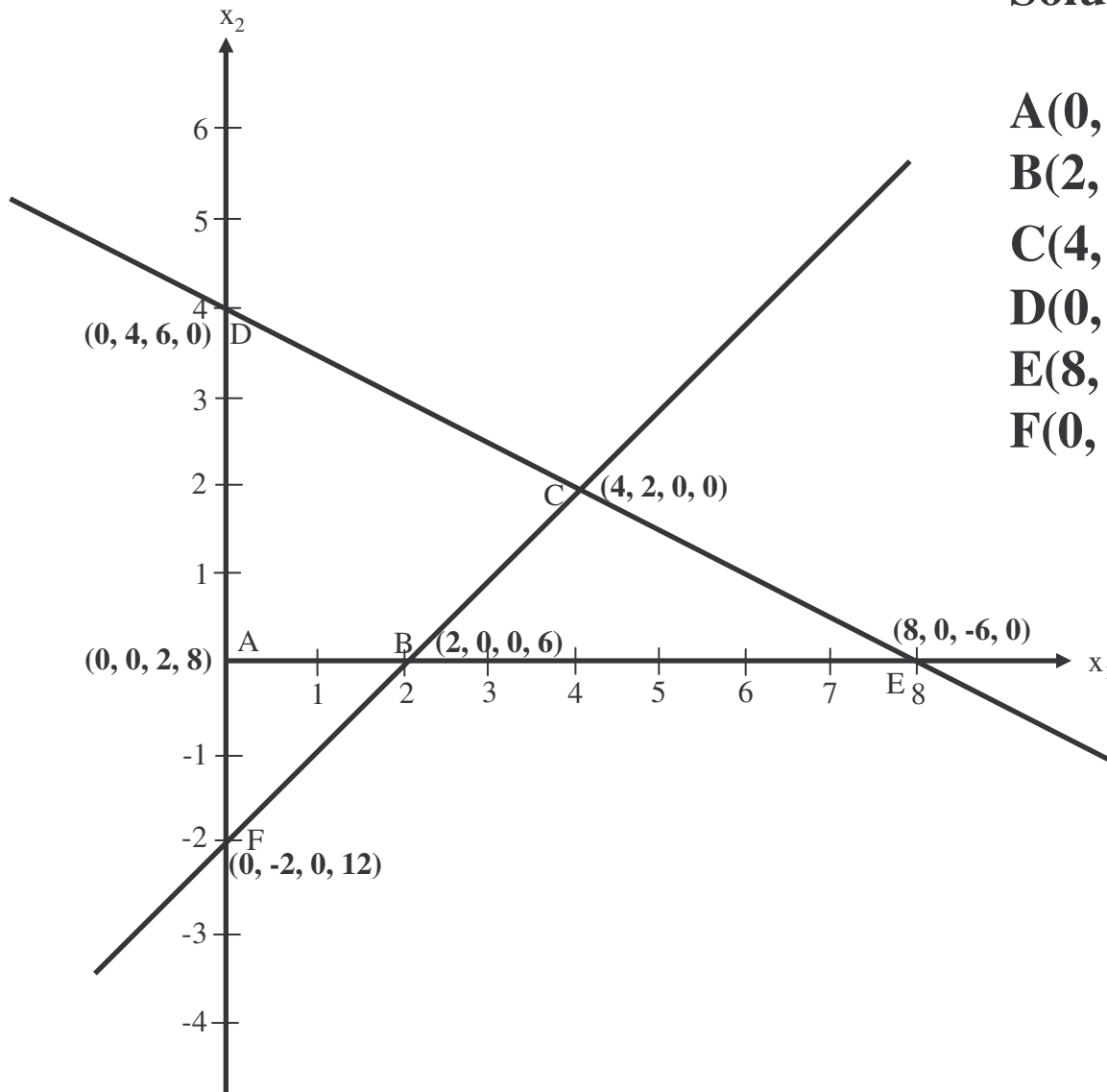
B(2, 0, 0, 6) admissível, $z = 8$

C(4, 2, 0, 0) admissível, $z = 20$

D(0, 4, 6, 0) admissível, $z = 8$

E(8, 0, -6, 0) não admissível

F(0, -2, 0, 12) não admissível



SOLUÇÕES BÁSICAS E ADMISSIBILIDADE

SENO Q O CONJUNTO FORMADO PELOS PONTOS x TAIS QUE:

$$AX = b \quad (*)$$

$$X \geq 0$$

UM PONTO x É VÉRTICE DE Q SE E SÓ SE x FÔR SOLUÇÃO BÁSICA ADMISSÍVEL DE (*).

QUANDO SE PASSA DE UM VÉRTICE A OUTRO VÉRTICE ADJACENTE, UMA SÓ VARIÁVEL BÁSICA PASSA A NÃO BÁSICA E UMA SÓ VARIÁVEL NÃO BÁSICA PASSA A BÁSICA.

A SOLUÇÃO ÓPTIMA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

$$\text{Max. } Z = CX$$

S.A.:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

SENO FINITA, ESTÁ NUM PONTO EXTREMO REGIÃO DE ADMISSIBILIDADE Q .

SOLUÇÕES BÁSICAS E ADMISSIBILIDADE

A CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA QUE UM PONTO X SEJA UM PONTO EXTREMO DO ESPAÇO DE SOLUÇÕES É QUE X SEJA UMA SOLUÇÃO BÁSICA ADMISSÍVEL TAL QUE

$$\begin{aligned}AX &= b \\ X &\geq 0\end{aligned}$$

ENTÃO RESOLVER UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR RESUME-SE A DETERMINAR TODAS AS BASES ADMISSÍVEIS DO SISTEMA DE EQUAÇÕES QUE AS SUAS RESTRIÇÕES FORMAM E ESCOLHER A(S) QUE TIVER(EM) MELHOR VALOR DA FUNÇÃO OBJECTIVO

CONCEITOS-CHAVE DAS SOLUÇÕES DO MÉTODO SIMPLEX

CONCEITO 1. O MÉTODO SIMPLEX ESTUDA APENAS AS SOLUÇÕES BÁSICAS.

PARA QUALQUER PROBLEMA COM, PELO MENOS, UMA SOLUÇÃO ÓPTIMA, ENCONTRAR A SOLUÇÃO ÓPTIMA APENAS REQUER ENCONTRAR A MELHOR SOLUÇÃO BÁSICA (DESDE QUE O PROBLEMA POSSUA UMA REGIÃO DE ADMISSIBILIDADE).

CONCEITO 2. O MÉTODO SIMPLEX É UM ALGORITMO ITERATIVO, ISTO É, É UM PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO SISTEMATIZADO QUE CONSISTE NA REPETIÇÃO DE UMA SÉRIE DE PASSOS, QUE SE DESIGNAM POR ITERAÇÕES, ATÉ QUE SE OBTENHA UM DETERMINADO RESULTADO.

CONCEITO 3. SEMPRE QUE POSSÍVEL, O PROCESSO DE INICIALIZAÇÃO DO MÉTODO SIMPLEX ESCOLHE A ORIGEM COMO SOLUÇÃO BÁSICA ADMISSÍVEL INICIAL (PONTO EM QUE TODAS AS VARIÁVEIS SÃO IGUAIS A ZERO)

CONCEITOS-CHAVE DAS SOLUÇÕES DO MÉTODO SIMPLEX

CONCEITO 4. DADA UMA SOLUÇÃO BÁSICA, É MUITO MAIS RÁPIDO COMPUTACIONALMENTE RECOLHER INFORMAÇÃO SOBRE AS SOLUÇÕES ADJACENTES DO QUE SOBRE OUTRAS SOLUÇÕES. POR ISSO, CADA VEZ QUE O MÉTODO SIMPLEX FAZ UMA ITERAÇÃO A PARTIR DA SOLUÇÃO BÁSICA CORRENTE PARA UMA SOLUÇÃO BÁSICA MELHOR, ESCOLHE SEMPRE UMA SOLUÇÃO BÁSICA ADJACENTE.

CONCEITO 5. APÓS A SOLUÇÃO BÁSICA CORRENTE SER IDENTIFICADA, O MÉTODO SIMPLEX EXAMINA CADA UMA DAS FRONTEIRAS DA REGIÃO DE ADMISSIBILIDADE QUE EMANA DESSA SOLUÇÃO BÁSICA.

CONCEITO 6. SE EXISTIR UMA TAXA DE VARIAÇÃO POSITIVA DA FUNÇÃO OBJECTIVO, ENTÃO EXISTE PELO MENOS UMA SOLUÇÃO BÁSICA MELHOR QUE A ACTUAL.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PELO MÉTODO SIMPLEX

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	-1	1	0	2
x_4	1	2	0	1	8
	4	2	0	0	0
x_1	1	-1	1	0	2
x_4	0	3	-1	1	6
	0	6	-4	0	-8
x_1	1	0	$2/3$	$1/3$	4
x_2	0	1	$-1/3$	$1/3$	2
	0	0	-2	-2	-20